Об амплитудах колеблющихся величин

А.ОВЧИННИКОВ, В.ПЛИС

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ – важнейший вид механического движения. Поэтому полезно обратить внимание на некоторые особые свойства этого движения.

Известно, что при гармонических колебаниях смещение x тела от положения равновесия зависит от времени t по закону

$$x = X\cos(\omega t + \delta).$$

Здесь X – величина максимального смещения, т.е. амплитуда смещения тела от положения равновесия, $(\omega t + \delta)$ – фаза колебаний, ω – циклическая (круговая) частота колебаний, δ – начальная фаза колебаний.

Дифференцирование смещения x по времени t позволяет найти проекцию скорости v_x колеблющегося тела на координатную ось OX:

$$v_x = -X\omega\sin(\omega t + \delta).$$

Произведение величин X и ω в правой части этого равенства имеет смысл величины максимальной скорости V, т.е. амплитуды скорости колеблющегося тела. Таким образом, амплитуды скорости и смещения связаны соотношением

$$V = X\omega. \qquad (1)$$

Дифференцируя проекцию v_x скорости по времени t, находим проекцию a_x ускорения колеблющегося тела на ось OX:

$$a_x = -X\omega^2\cos(\omega t + \delta).$$

Произведение величин X и ω^2 в правой части равенства – это величина максимального ускорения A, т.е. амплитуды ускорения колеблющегося тела. Иными словами, амплитуды ускорения и смещения связывает выражение

$$A = X\omega^2. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) можно получить по-другому. Их вывод основан на том, что если точка C равномерно с линейной скоростью V и угловой скоростью ω движется по окружности радиусом X (рис.1), то ее проекция B на координатную ось OX совершает гармонические колебания с циклической частотой ω. Из кинематики движения по окружности известно, что линейная скорость V, угловая скорость ω и радиус вращения X связаны соотношением, совпадающим с соотношением (1), а центростремительное ускорение A выражается через радиус X и квадрат угловой скорости ω формулой, совпадающей с выражением (2).

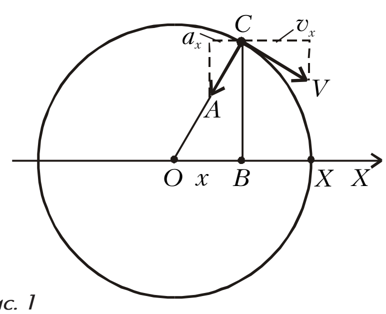

Рис. 1

Обратим внимание еще на одно важное свойство гармонических колебаний. При рассмотрении колебаний в механике часто удобнее их описывать не на языке сил, а на языке энергий. Допустим, исследуемая система такова, что ее потенциальная и кинетическая энергии описываются формулами

$$E_p = \frac{\alpha x^2}{2},\ E_k = \frac{\beta(x')^2}{2},$$

где α и β – положительные постоянные величины (параметры системы), x и x' – смещение от положения равновесия и его первая производная по времени, т.е. проекция скорости v_x. Закон сохранения энергии записывается в виде

$$\frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta(x')^2}{2} = \text{const}. \qquad (3)$$

Продифференцировав это равенство по времени, получим дифференциальное уравнение

$$x'' + \frac{\alpha}{\beta}x = 0,$$

где x'' – вторая производная от x по времени, т.е. проекция ускорения a_x. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решением этого уравнения является функция

$$x = X\cos(\omega t + \delta),$$

причем для циклической частоты находим

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \qquad (4)$$

Таким образом, приходим к выводу, что если энергия исследуемой системы описывается формулой (3), то движение является гармоническим колебанием с циклической частотой, определяемой соотношением (4).

Теперь обсудим несколько конкретных задач.

Задача 1. *К пружине жесткостью k, один конец которой закреплен, подвешен груз массой m, лежащий на подставке так, что пружина не растянута (рис.2). Подставку быстро убирают. Найдите величины максимальной скорости и максимальной силы упругости пружины при дальнейшем движении груза.*

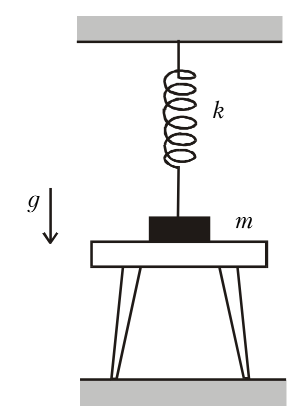

Рис. 2

Положение равновесия находится ниже начального положения груза на $X = mg/k$. Колебания смещения x груза относительно положения равновесия будут происходить по закону $x(t) = X\cos\omega t$ (ось OX направлена по вертикали вверх), где $\omega = \sqrt{k/m}$ – круговая частота колебаний.

В начальный момент пружина не деформирована; следовательно, в этот момент ускорение груза равно ускорению свободно падающего тела: $a_x = -g$ и максимально по величине. Максимальная скорость достигается при прохождении грузом положения равновесия. Амплитуда V колебаний скорости связана с амплитудой A колебаний ускорения соотношением $V = A/\omega$. Отсюда

$$V = g\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

После прохождения положения равновесия ускорение груза направлено вверх, растет по величине и достигает при остановке максимального значения $a_x = g$. Из второго закона Ньютона $ma_x = F_x + mg_x$ находим максимальную величину силы упругости пружины:

$$F = mg - (-mg) = 2mg.$$

Задача 2. *В известном опыте академик А.Ф.Иоффе для определения амплитуды колебаний ножки камертона подносил к ней стальной шарик на нити вплоть до соприкосновения шарика с ножкой (рис.3). Найдите амплитуду X колебаний ножки камертона, если максимальная высота подъема шарика после одного отскока (точнее – ее среднее значение при многочисленных опытах) равна H. Частота колебаний ножки камертона* ν. *Масса шарика мала по сравнению с массой ножки камертона.*

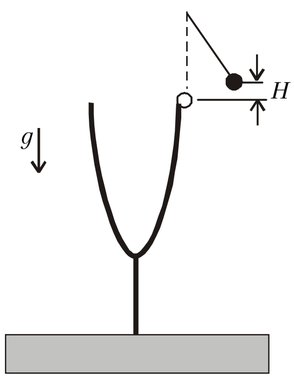

Рис. 3

Найдем величину скорости, которую приобретает легкий неподвижный шарик в результате абсолютно упругого соударения с массивной ножкой камертона, движущейся со скоростью $\vec{V}$. Покоящийся относительно неподвижной (лабораторной) системы отсчета шарик движется относительно такой ножки со скоростью $-\vec{V}$. В результате абсолютно упругого соударения относительная скорость шарика меняет знак и становится равной $\vec{V}$. Тогда скорость шарика в неподвижной системе отсчета, равная векторной сумме скорости ножки и относительной скорости шарика, будет равна $2\vec{V}$. Максимальная высота подъема шарика достигается при максимальной начальной скорости, которая для ножки камертона равна $X\omega$, а для шарика – соответственно, $2X\omega$. По закону сохранения полной механической энергии,

$$\frac{m(2X\omega)^2}{2} = mgH,$$

где m – масса шарика. Отсюда, с учетом соотношения $\omega = 2\pi\nu$, находим искомую амплитуду колебаний:

$$X = \frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{\frac{gH}{2}}.$$

Задача 3. *На массивной чашке пружинных весов лежит маленький грузик. Масса чашки* m_1, *масса грузика пренебрежимо мала. К дну чашки подвешен груз массой* m_2 *(рис.4). Вся система находится в равновесии. Нить, на которой подвешен груз, пережигают. При каком соотношении между* m_1 *и* m_2 *грузик на чашке начнет подскакивать?*

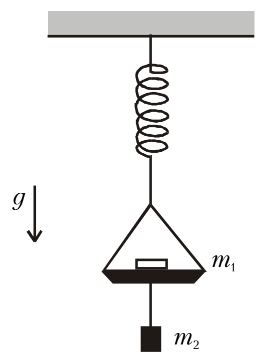

Рис. 4

После отрыва груза массой m_2 положение равновесия системы сместится вверх на $X = m_2g/k$, где k – жесткость пружины. Колебания смещения x чашки относительно нового положения равновесия будут происходить по гармоническому закону $x(t) = X\cos\omega t$ с круговой частотой $\omega = \sqrt{k/m_1}$ (ось OX направлена по вертикали вниз). В процессе подъема чашки с грузом после прохождения положения равновесия ускорение направлено вниз, растет по величине и достигает наибольшего значения

$$A = \omega^2 X = \frac{kX}{m_1} = \frac{m_2 g}{m_1}.$$

Если $A < g$, т.е. $m_2 < m_1$, при движении чашки вниз грузик будет оставаться на ней. Если $A > g$, т.е. $m_2 > m_1$, грузик оторвется от чашки (до того, как чашка остановится).

Задача 4. *Математический маятник длиной L совершает колебания в вертикальной плоскости с малой угловой амплитудой. Для увеличения амплитуды колебаний нить при каждом прохождении положения равновесия укорачивают на малую величину* ΔL, *вытягивая ее через узкое отверстие в месте подвеса (рис.5), а в каждом крайнем положении нить удлиняют на ту же величину* ΔL. *Нить удлиняют и укорачивают таким образом, что за время одного изменения длины сила натяжения остается постоянной по величине. Найдите относительное увеличение амплитуды колебаний угла отклонения нити от вертикали за один период.*

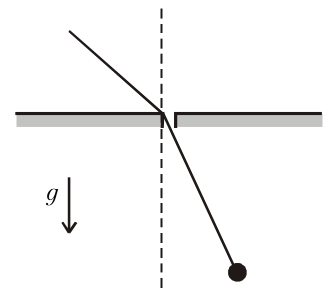

Рис. 5

При прохождении маятником положения равновесия внешняя сила поднимает грузик на ΔL и совершает при этом работу

$$\left(\frac{mV^2}{L} + mg\right)\Delta L,$$

где m – масса грузика, V – его максимальная скорость. В крайних положениях, при которых угол отклонения нити от вертикали равен $\pm A$, длина маятника увеличивается на ΔL. В этом случае работа внешней силы равна $-mg\Delta L\cos A$. В течение каждого периода длина маятника дважды увеличивается и уменьшается. Таким образом, приращение энергии маятника за период колебаний составляет

$$\Delta W = 2\left(\frac{mV^2}{L} + mg(1-\cos A)\right)\Delta L,$$

или, поскольку рассматриваются малые колебания, т.е. угол A мал и $\cos A = 1 - A^2/2$,

$$\Delta W = 2\left(mg\Delta L\frac{A^2}{2} + \frac{mV^2}{L}\Delta L\right).$$

Амплитуда колебаний скорости V связана с амплитудой колебаний смещения LA соотношением $V = \omega LA$, где $\omega = \sqrt{g/L}$ – круговая частота колебаний маятника. Тогда

$$\Delta W = 6\frac{\Delta L}{L}\frac{mV^2}{2} = 6\frac{\Delta L}{L} mgL\frac{A^2}{2}.$$

Энергия маятника равна

$$W = \frac{mV^2}{2} = mgL\frac{A^2}{2},$$

поэтому формула для ΔW принимает вид

$$\Delta W = 6\frac{\Delta L}{L}W.$$

Таким образом, энергия маятника будет систематически возрастать, получая за каждый период небольшое приращение, пропорциональное самой этой энергии W и величине $\Delta L/L$. Отсюда для относительного увеличения энергии получаем

$$\frac{\Delta W}{W} = 6\frac{\Delta L}{L}.$$

Теперь, принимая во внимание выражение для энергии маятника

$$W = mgL\frac{A^2}{2},$$

найдем

$$\Delta W = \frac{mgL}{2}2A\Delta A \text{ и } \frac{\Delta W}{W} = 2\frac{\Delta A}{A}.$$

Сравнивая между собой два выражения для $\Delta W/W$, для относительного увеличения амплитуды угла за период получим

$$\frac{\Delta A}{A} = 3\frac{\Delta L}{L}.$$

Задача 5. *Вдали от всех тяготеющих масс в космосе находится тонкая однородная спица длиной $L = 10$ м и массой $M = 1$ кг. По ней без трения может скользить бусинка массой $m = 0,1$ кг. В начальный момент бусинка смещена относительно центра спицы на $d = 1$ см и система неподвижна. С какой по величине скоростью V (в системе спицы) и через какое время τ бусинка достигнет центра спицы? Гравитационная постоянная $G = 6,67\cdot10^{-11}$ $Н\cdot м^2/кг^2$.*

В процессе колебаний центр масс системы тел будет оставаться неподвижным. Начало неподвижной системы отсчета OX поместим в центр масс, а подвижную систему отсчета OX_1 свяжем со спицей. Ускорение бусинки при малом ее смещении x_1 (в системе спицы) определяется силой притяжения концевого отрезка спицы, имеющего вдвое большую длину и расположенного на расстоянии $L/2$ от бусинки:

$$a_{бx} = \frac{F_x}{m} = -\frac{Gm(M/L)2x_1}{m(L/2)^2} = -\frac{8GM}{L^3}x_1.$$

Ускорение стержня при этом смещении бусинки равно

$$a_{сx} = -\frac{F_x}{M} = -\frac{Gm(M/L)2x_1}{M(L/2)^2} = \frac{8Gm}{L^3}x_1.$$

Для сложения ускорений справедливо то же правило, что и для сложения скоростей (в этом легко убедиться, например, путем дифференцирования). Тогда ускорение бусинки относительно стержня будет

$$a_{бx_1} = x_1'' = a_{бx} - a_{сx} = -\frac{8G(M+m)}{L^3}x_1.$$

Получено уравнение гармонических колебаний бусинки относительно спицы. Круговая частота этих колебаний равна

$$\omega = \frac{2}{L}\sqrt{\frac{2G(M+m)}{L}} \approx 0,77\cdot10^{-6}\ \text{с}^{-1}.$$

Бусинка вернется в центр спицы через четверть периода колебаний

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega} \approx 2\cdot10^6\ \text{с}$$

с относительной скоростью

$$V = \omega d \approx 0,77\cdot10^{-8}\ \text{м/с}.$$

Задача 6. *Потенциальная энергия атома в некотором кристалле описывается формулой $U(r) = U_0\left((r_0/r)^{12} - 2(r/r_0)^6\right)$, где $U_0 = 8,8\cdot10^{-4}$ эВ, а $r_0 = 0,287$ нм соответствует равновесному положению атома. При малых отклонениях от положения равновесия происходят колебания. Согласно квантовым представлениям, энергия колебаний с частотой $\omega = 2\pi\nu$ может принимать значения $E_n = h\nu(n+1/2)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где $h = 6,62\cdot10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка. Оцените наименьшую амплитуду X_0 колебаний смещения атома в таком кристалле. Масса атома $m = 6,4\cdot10^{-24}$ г; 1 эВ $= 1,6\cdot10^{-19}$ Дж.*

Для определения круговой частоты ω колебаний атома обратимся к гармоническим колебаниям груза массой m на пружине жесткостью k, находящегося на гладкой горизонтальной плоскости. При смещении на x от положения равновесия приращение потенциальной энергии груза составляет $kx^2/2$, приращение его кинетической энергии составляет $mv_x^2/2$, а круговая частота колебаний равна $\omega = \sqrt{k/m}$. Вернемся к нашей задаче и проанализируем выражение для потенциальной энергии атома в кристалле. Отметим, что при $r = r_0$ потенциальная энергия достигает минимума (проверьте это самостоятельно). Тогда при малых смещениях δr $(\delta r \ll r_0)$ от положения равновесия приращение потенциальной энергии можно приближенно считать пропорциональным квадрату смещения:

$$\Delta U = U(r_0+\delta r) - U(r_0) = k(\delta r)^2/2.$$

Найдем коэффициент пропорциональности k. При малых x справедливы приближенные равенства

$$(1+x)^n = 1 + nx + n(n-1)x^2,$$

$$1/(1+x) = 1 - x,$$

и приращение потенциальной энергии при малых смещениях δr от положения равновесия принимает вид

$$\Delta U = U(r_0+\delta r) - U(r_0) = \left(36U_0/r_0^2\right)(\delta r)^2.$$

Отсюда получаем

$$k = \frac{72U_0}{r_0^2} \text{ и } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{6}{r_0}\sqrt{\frac{2U_0}{m}}.$$

Искомую амплитуду X_0 найдем из условия квантования колебаний:

$$E_0 = h\nu/2 = kX_0^2/2,$$

откуда

$$X_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{h}{m\nu}} = \sqrt{\frac{hr_0}{12\pi\sqrt{2mU_0}}} = 0,06\ \text{нм}.$$

Упражнения

1. На неподвижный груз массой $m = 10$ кг, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности и прикрепленный пружиной жесткостью $k = 4\cdot10^3$ Н/м к вертикальной стенке (рис.6), в течение некоторого времени τ действует постоянная по величине и направлению сила F. При каких значениях τ амплитуда колебаний скорости после прекращения действия силы будет максимальной?

2. Брусок массой m_1 под действием пружины совершает на гладком столе гармонические колебания с амплитудой X и периодом T. Пуля массой m_2, летящая вдоль направления движения бруска, попадает в него. В результате колебания прекращаются. Определите величину V скорости пули.